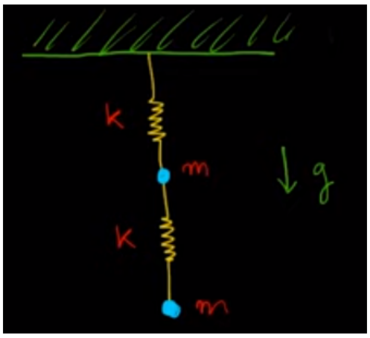
Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 6

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

22 de julio de 2019

En este ejercicio queremos estudiar un sistema de dos muelles de constante k y longitud de reposo a[1] conectados en serie, con dos masas m (una al final de cada muelle) sometidos a la fuerza de la gravedad, como se muestra en la figura de la derecha.



1. Encontrar el Lagrangiano

Por simplicidad, podemos escoger que las cantidades sean positivas cuando estas van hacia abajo. Llamemos y_i a las posiciones de las dos masas con respecto al techo y, análogamente a lo que ha definido Javier en el capítulo 6, llamemos x_i a las distancias de las dos masas respecto a las posiciones de reposo de los muelles. Entonces tenemos que

$$y_1 = a + x_1 \qquad y_2 = 2a + x_2 \tag{1}$$

La energía cinética de cada masa es la siguiente:

$$T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) \tag{2}$$

Para la energía potencial, tenemos dos tipos, la energía potencial elástica de cada muelle:

$$V_e = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(y_1 - a\right)^2 + \left(y_2 - y_1 - a\right)^2\right] = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2\right] \tag{3}$$

Y la energía potencial gravitatoria:

$$V_g = -mg\left(y_1 + y_2\right) = -mg\left(3a + x_1 + x_2\right) \tag{4}$$

[1] Javier no dice nada de la longitud de reposo, así que lo único que supondré es que son iguales para los dos muelles.

Juntándolo todo, obtenemos que el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2\right] + mg\,(3a + x_1 + x_2) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}k\left[2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right] + mg\,(3a + x_1 + x_2) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}m\begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}k\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$+\, mg\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 3mga = \frac{m}{2}\dot{\vec{\mathbf{x}}}^t\dot{\vec{\mathbf{x}}} - \frac{k}{2}\vec{\mathbf{x}}^t A\vec{\mathbf{x}} + mg\vec{\mathbf{b}}^t\vec{\mathbf{x}} + 3mga \tag{7}$$

2. Cambio de Coordenadas

Para eliminar el término proporcional a x_1x_2 vamos a tener que diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Primero encontramos el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{9}$$

Para encontrar los vectores propios simplemente utilizamos que estos deben cumplir que

$$2x - y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}x \Longrightarrow y = \left(2 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)x = \left(\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)x \tag{10}$$

$$\vec{\mathbf{c}}_+ = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\vec{\mathbf{c}}_- = \frac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Definiendo una nueva variable como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{\mathbf{z}} = M^{-1}\vec{\mathbf{x}} \tag{14}$$

En este caso el Lagrangiano se simplifica a

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{\mathbf{z}}}^t\dot{\vec{\mathbf{z}}} - \frac{k}{2}\vec{\mathbf{z}}^t\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}\vec{\mathbf{z}} + mg\vec{\mathbf{b}}^t M\vec{\mathbf{z}} + 3mga \tag{15}$$

3. Solucion de las ecuaciones

En este Lagrangiano ya no tenemos términos cruzados de la forma $z_1 z_2$. Por lo que las ecuaciones de Lagrange serán independientes. En este caso las ecuaciones de Lagrange serán:

$$\frac{\partial L}{\partial z_1} = -k\lambda_+ z_1 + mg\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}_+ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) = m\ddot{z}_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2} = -k\lambda_- z_2 + mg\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}_- = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}\right) = m\ddot{z}_2 \tag{17}$$

Que tienen como solución

$$z_1(t) = \frac{mg}{k\lambda_+}\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}_+ + A_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k\lambda_+}{m}} + \varphi_1\right) \tag{18}$$

$$z_1(t) = \frac{mg}{k\lambda_-}\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}_- + A_2 \cos\left(t\sqrt{\frac{k\lambda_-}{m}} + \varphi_2\right) \tag{19}$$

Aunque la solución final es bastante complicada, después de algunas simplificaciones podemos llegar a

$$y_1(t) = a + \frac{2mg}{k} + A_1\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cos\left(t\sqrt{\frac{k(3+\sqrt{5})}{2m}} + \varphi_1\right) + A_2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cos\left(t\sqrt{\frac{k(3-\sqrt{5})}{2m}} + \varphi_2\right)$$

$$y_2(t) = 2a + \frac{3mg}{k} - A_1\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cos\left(t\sqrt{\frac{k(3+\sqrt{5})}{2m}} + \varphi_1\right) + A_2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cos\left(t\sqrt{\frac{k(3-\sqrt{5})}{2m}} + \varphi_2\right)$$

$$\vec{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} a + \frac{2mg}{k} \\ 2a + \frac{3mg}{k} \end{pmatrix} + A_1\vec{\mathbf{c}}_+ \cos\left(\sqrt{\lambda_+}\omega_0 t + \varphi_1\right) + A_2\vec{\mathbf{c}}_- \cos\left(\sqrt{\lambda_-}\omega_0 t + \varphi_2\right) \tag{20}$$

Estas ecuaciones tienen la forma que deseamos, vamos a estudiarlas un poco, comparando con los resultados obtenidos por Javier sin gravedad. Primero hay que añadir que hay dos fuentes de diferencias entre esto y lo que hizo Javier en el capítulo 6. La primera es evidentemente la gravedad, y la segunda que estamos forzando que el extremo de uno de los muelles esté siempre quieto. Esta segunda tiene una consecuencia inmediata, y es que hemos perdido el término lineal en t. Para simplificar el estudio voy a fijar $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Primero de todo vamos a estudiar el caso $A_1 = A_2 = 0$. Entonces las masas están quietas (la posición no depende del tiempo) y la solución es

$$y_1(t) = a + \frac{2mg}{k} \qquad y_2(t) = 2a + \frac{3mg}{k} \tag{21}$$

Esto es exactamente lo que obtendríamos si resolviéramos el problema de estática igualando las fuerzas a 0. Por otra parte, si "apagamos" la gravedad, es decir ponemos $g = 0$ obtenemos el mismo resultado que Javier.

Estudiemos ahora el caso $A_2 = 1$, $A_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} a + \frac{2mg}{k} \\ 2a + \frac{3mg}{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega_0 t\right) \tag{22}$$

Lo que podemos ver es que las dos masas suben y bajan juntas, además, como es de esperar, la masa inferior oscila con mayor amplitud que la superior. Este modo de vibración es equivalente al que se muestra en el minuto 35:33 del capítulo 6, pues los dos muelles se estiran y se contraen a la vez y además es el modo de frecuencia más baja. Vemos que la gravedad no juega ningún papel importante aquí, pero el hecho de mantener fijo uno de los extremos es el que provoca no solo la diferencia de amplitudes sino también que la frecuencia de oscilación es más pequeña que en el caso que se deja oscilar libremente (en ese caso recordemos la frecuencia era ω_0).

En el otro caso, $A_2 = 0$, $A_1 = 1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} a + \frac{2mg}{k} \\ 2a + \frac{3mg}{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega_0 t\right) \tag{23}$$

En este caso las dos masas suben y bajan en contraposición, cuando una sube la otra baja y viceversa. Además la masa inferior tiene ahora una amplitud más pequeña, este modo es el equivalente al que se muestra en el minuto 35:58, pues cuando uno de los muelles se contrae el otro se dilata y además es el modo de frecuencia más alta. De nuevo la gravedad no juega ningún papel, y todos los cambios se deben al hecho de haber fijado un extremo, también en este caso la frecuencia es inferior a la que tendríamos con el extremo libre (en ese caso la frecuencia era $\sqrt{3}\omega_0$).